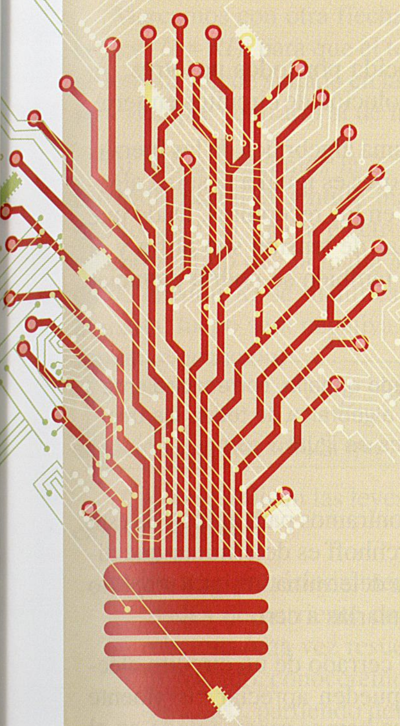

7 Resolución de circuitos con varias mallas

Contenidos

Hasta ahora, hemos estudiado métodos de resolución de circuitos eléctricos en los que únicamente existía una red de resistencias. En multitud de aplicaciones nos podemos encontrar con redes complejas, donde se interconectan resistencias con generadores. En estos casos, para llegar a la solución deseada es necesario emplear métodos de resolución específicos, tales como las leyes de Kirchhoff, las transformaciones de un circuito de triángulo a estrella y viceversa, el teorema de la superposición y el teorema de Thévenin.

Objetivos

- Realizar los cálculos precisos para resolver un circuito eléctrico con varias cargas o varios generadores conectados entre sí.
- Emplear el método más idóneo para la resolución de un circuito de C.C.
- Aplicar las leyes de Kirchhoff para la resolución de circuitos con varias mallas en C.C.
- Utilizar las transformaciones de triángulo a estrella y viceversa para la obtención de la resistencia equivalente de un circuito complejo.
- Resolver circuitos aplicando los teoremas de superposición y Thévenin.

7.1. Leyes de Kirchhoff

Estas leyes se utilizan para resolver circuitos eléctricos complejos, en los cuales existen interconectados varios generadores y receptores.

En el siguiente ejemplo se muestra un circuito de este tipo.

En el circuito de la Figura 7.1 se han conectado en paralelo dos baterías de acumuladores que suministran energía a una lámpara de 10 Ω. La batería n.º 1 produce una f. e. m. $E_1 = 12$ V con una resistencia interna $r_1 = 0{,}2$ Ω. En la batería n.º 2, $E_2 = 11$ V, $r_2 = 0{,}1$ Ω. Calcula la tensión que aparece en bornes de la lámpara, así como la intensidad y potencia de esta. ¿Qué corriente cede cada una de las baterías? Este problema se puede resolver aplicando adecuadamente las leyes de Kirchhoff.

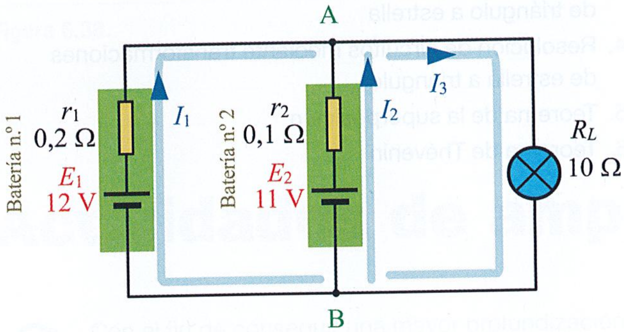

Figura 7.1.

1.ª ley de Kirchhoff

En cierto modo, esta ley ya la hemos estado aplicando para la resolución de los circuitos en paralelo. Dice así:

> En todo circuito eléctrico, la suma de las corrientes que se dirigen hacia un nudo es igual a la suma de las intensidades que se alejan de él.

Un **nudo** es cualquier punto de un circuito donde se conectan más de dos conductores. En el ejemplo mostrado en la Figura 7.1 existen el nudo A y el nudo B.

En el nudo A se cumplirá que (Figura 7.2):

$$I_1 + I_2 = I_3$$

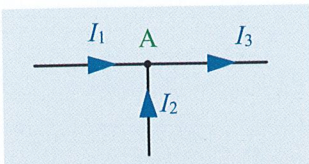

Figura 7.2. Nudo.

2.ª ley de Kirchhoff

Esta otra ley también es conocida por todos nosotros, ya que la hemos aplicado en la resolución de circuitos en serie.

En un circuito cerrado, la suma algebraica de las fuerzas electromotrices de los generadores es igual a la suma algebraica de las caídas de tensión en los receptores. Dado que tanto las f. e. m. como las caídas de tensión son al fin y al cabo diferencias de potencial, también se podría enunciar esta ley así:

> A lo largo de todo camino cerrado o malla, correspondiente a un circuito eléctrico, la suma algebraica de todas las diferencias de potencial o tensiones es igual a cero.

La única dificultad que encontramos para aplicar de esta última manera la 2.ª ley de Kirchhoff es determinar qué diferencias de potencial son de un determinado signo respecto a las otras, y así conseguir igualarlas a cero.

Una **malla** es todo camino cerrado de un circuito eléctrico. En nuestro ejemplo se pueden apreciar claramente la malla M_1 y la malla M_2. Las hemos representado en el circuito mediante una flecha curvada que nos indica el recorrido de las mismas (Figura 7.4). La malla M_1 se cierra por la batería de 12 V junto con su resistencia interna de 0,2 Ω, continúa por la resistencia interna de 0,1 Ω de la segunda batería, para acabar cerrando el circuito por la batería de 11 V. La malla M_2 lo hace por la batería de 11 V y su correspondiente resistencia interna de 0,1 Ω y se cierra por la resistencia de 10 Ω de la lámpara.

Antes de aplicar esta segunda ley, conviene establecer una regla de signos que nos indique las polaridades correctas de cada una de las diferencias de potencias que aparecen en cada malla.

Marcamos con una flecha la f. e. m. del generador (la punta de la flecha siempre nos indica el potencial positivo). La intensidad que parte del generador la indicamos con una flecha (sentido convencional de la corriente) del mismo sentido que la f. e. m. (Figura 7.3).

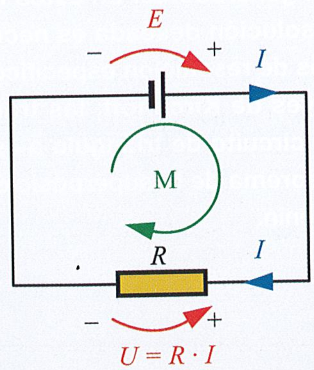

Figura 7.3. Polaridad de las diferencias de potencial en una malla.

Marcamos con otra flecha la caída de tensión en el receptor ($U = RI$); para que el terminal positivo de esta caída de tensión quede situado en la punta de la flecha, su sentido será siempre contrario al de la intensidad que recorre.

Si ahora aplicamos la 2.ª ley de Kirchhoff a la malla formada, según el sentido marcado en la Figura 7.3, tendremos que: la fuerza electromotriz E se manifiesta en el mismo sentido que la malla M, luego será positiva; la caída de tensión RI se manifiesta en sentido contrario al de la malla, luego será negativa. De esta forma tendremos la siguiente ecuación:

$$E - RI = 0$$

ecuación que nos indica que, efectivamente, $E = RI$.

¿Cómo se aplican las leyes de Kirchhoff para la resolución de circuitos?

a) Se fija provisionalmente el sentido de las intensidades de corriente por cada una de las ramas del circuito (una vez resuelto el sistema de ecuaciones planteado, conoceremos el verdadero sentido de las mismas), partiendo del principio de que los generadores proporcionan corriente por su terminal positivo (sentido de corriente convencional).

b) La aplicación de la segunda ley requiere fijar previamente y de forma arbitraria un sentido para recorrer cada una de las mallas. Las f. e. m. y las caídas de tensión se consideran positivas si la flecha que indica su sentido coincide con el marcado por nosotros en la malla, y negativa en el caso contrario.

c) Se aplicará la 1.ª ley a todos los nudos del circuito excepto a uno (esto se hace para no escribir ecuaciones repetidas).

d) Se aplicará la 2.ª ley a tantas mallas o circuitos cerrados como sea necesario para disponer de un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas.

Actividad resuelta 7.1

Resuelve ahora el ejemplo presentado al inicio en la Figura 7.1.

Solución:

En un principio, se ha supuesto que las intensidades I_1 e I_2 parten de los generadores hacia la lámpara (según el sentido convencional), donde se juntan y forman I_3. Los términos 0,2 I_1 y 0,1 I_2 corresponden a las caídas de tensión de los respectivos generadores ($u = r_i I$). El término 10 I_3 corresponde a la tensión en bornes de la lámpara ($U_L = R \cdot I$) (Figura 7.4).

Nudo A (1) $I_1 + I_2 = I_3$

Malla M_1 (2) $12 - 0{,}2\, I_1 + 0{,}1\, I_2 - 11 = 0$

Malla M_2 (3) $11 - 0{,}1\, I_2 - 10\, I_3 = 0$

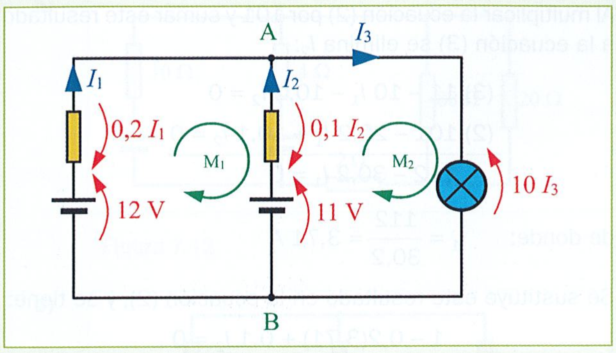

Figura 7.4.

Al recorrer la malla M_1, la caída de tensión 0,2 I_1 y los 11 V del generador n.º 2 quedan en sentido contrario a los 12 V del generador n.º 1 y a la caída de tensión 0,1 I_2 (Figura 7.5).

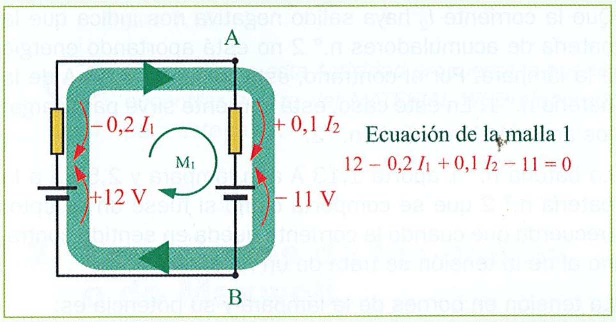

Figura 7.5.

Al recorrer la malla M_2, la caída de tensión 0,1 I_2 y la tensión en bornes de la lámpara 10 I_3 quedan en sentido contrario a los 11 V del generador n.º 2 (Figura 7.6).

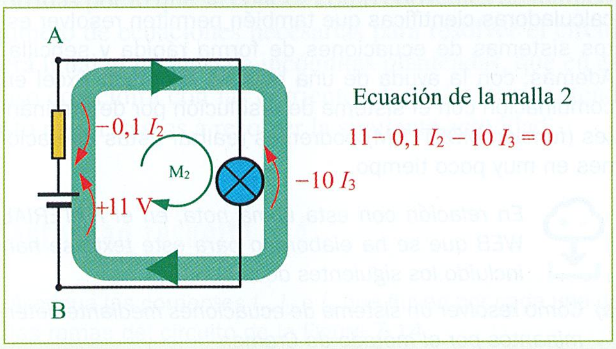

Figura 7.6.

Ahora solo nos queda resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (I_1, I_2 e I_3). Para ello, nos valemos de cualquiera de los métodos conocidos: reducción, sustitución e igualación. En nuestro caso sustituiremos los términos de la ecuación (1) en la ecuación (3). De esta forma eliminamos una ecuación y una incógnita:

(3) $11 - 0{,}1\, I_2 - 10\,(I_1 + I_2) = 0$, simplificando:

(3) $11 - 10\, I_1 - 10{,}1\, I_2 = 0$, y con la ecuación n.º 2:

(2) $1 - 0{,}2\, I_1 + 0{,}1\, I_2 = 0$

Al multiplicar la ecuación (2) por 101 y sumar este resultado a la ecuación (3) se elimina I_2:

$$\begin{array}{l}(3)\ 11 - 10\, I_1 - 10{,}1\, I_2 = 0 \\ (2)\ 101 - 20{,}2\, I_1 + 10{,}1\, I_2 = 0 \\ \hline 112 - 30{,}2\, I_1 = 0\end{array}$$

de donde: $I_1 = \dfrac{112}{30{,}2} = 3{,}71\ \text{A}$

Se sustituye este resultado en la ecuación (2), y se tiene:

$$1 - 0{,}2(3{,}71) + 0{,}1\, I_2 = 0$$

$$I_2 = \frac{0{,}2(3{,}71) - 1}{0{,}1} = -2{,}58\ \text{A}$$

y en la ecuación (1) obtenemos:

$$I_3 = 3{,}71 - 2{,}58 = 1{,}13\ \text{A}$$

Que la corriente I_2 haya salido negativa nos indica que la batería de acumuladores n.° 2 no está aportando energía a la lámpara. Por el contrario, está tomando 2,58 A de la batería n.° 1. En este caso, esta corriente sirve para cargar los acumuladores de la n.° 2.

La batería n.° 1 aporta 1,13 A a la lámpara y 2,58 A a la batería n.° 2 que se comporta como si fuese un receptor (recuerda que cuando la corriente queda en sentido contrario al de la tensión se trata de un receptor).

La tensión en bornes de la lámpara y su potencia es:

$$U_{AB} = R_L I_3 = 10 \cdot 1{,}13 = 11{,}3\ \text{V}$$

$$P_1 = U_{AB} I_3 = 11{,}3 \cdot 1{,}13 = 12{,}8\ \text{W}$$

Nota: Los sistemas con tres ecuaciones se pueden resolver también mediante determinantes y calculando las incógnitas por el sistema de Cramer. En la actualidad existen muchas calculadoras científicas que también permiten resolver estos sistemas de ecuaciones de forma rápida y sencilla. Además, con la ayuda de una hoja de Microsoft Excel en combinación con el sistema de resolución por determinantes (función MDETERM) podremos realizar estas operaciones en muy poco tiempo.

En relación con esta úlima nota, en el MATERIAL WEB que se ha elaborado para este texto se han incluido los siguientes documentos:

a) Cómo resolver un sistema de ecuaciones mediante determinantes por el método de Cramer.

b) Cómo resolver el sistema de ecuaciones de la Actividad resuelta 7.1 con la ayuda de una hoja de Microsoft Excel y determinantes.

Actividad resuelta 7.2

Se conectan en serie tres baterías de acumuladores, tal como se muestra en el circuito de la Figura 7.7, para alimentar un horno de 5 Ω de resistencia. Determina la tensión en bornes del horno, así como su tensión y potencia.

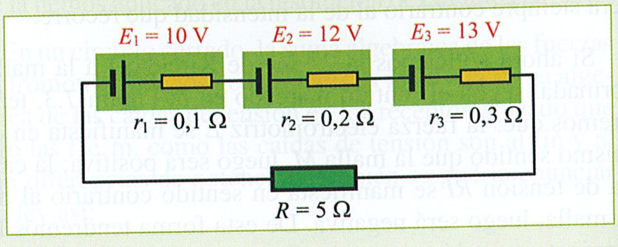

Figura 7.7.

Solución:

Primero marcamos el sentido de la corriente eléctrica y el de las diferentes tensiones del circuito (Figura 7.8). Como no hay más que una malla, la ecuación se compone aplicando la 2.ª ley de Kirchhoff:

$$10 - 0{,}1\, I + 12 - 0{,}2\, I + 13 - 0{,}3\, I - 5\, I = 0$$

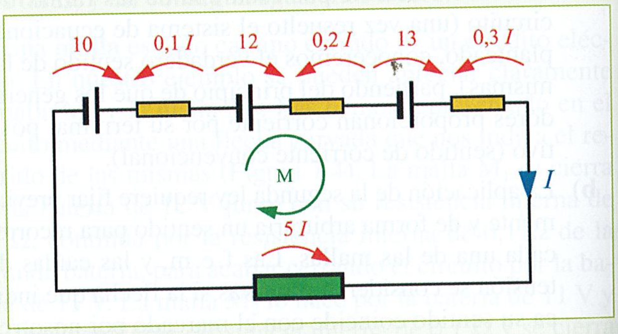

Figura 7.8.

Agrupando términos:

$$(10 + 12 + 13) - I(0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 5) = 0$$

y despejando, tenemos que:

$$I = \frac{35}{5{,}6} = 6{,}25\ \text{A}$$

Tensión en bornes del horno: $U = RI = 5 \cdot 6{,}25 = 31{,}25$ V

Potencia del horno: $P = UI = 31{,}25 \cdot 6{,}25 = 195$ W

Actividad resuelta 7.3

Determina las corrientes por cada una de las ramas del circuito de la Figura 7.9.

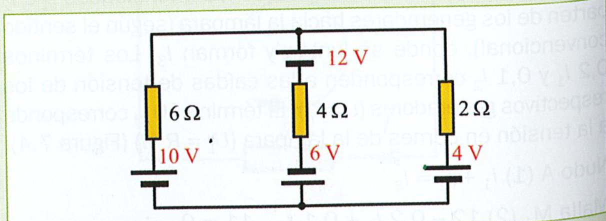

Figura 7.9

Solución:

Primero marcamos el sentido de la corriente eléctrica y el de las diferentes tensiones del circuito (Figura. 7.10).

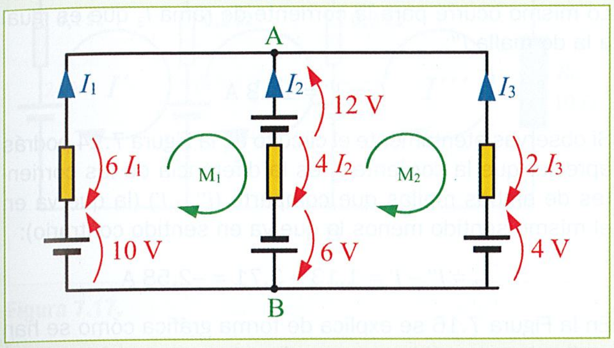

Figura 7.10.

Al aplicar la primera y segunda ley de Kirchhoff al circuito obtenemos las siguientes ecuaciones:

Nudo A: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Malla 1: $10 - 6I_1 - 12 + 4I_2 + 6 = 0$

Malla 2: $-6 - 4I_2 + 12 + 2I_3 - 4 = 0$

Ordenamos y simplificamos el sistema de ecuaciones:

(1): $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

(2): $-6I_1 + 4I_2 + 0I_3 = -4$

(3): $0I_1 - 4I_2 + 2I_3 = -2$

Aplicando la regla de Cramer, o por cualquier otro método adecuado para la resolución de sistemas de ecuaciones, se llega al siguiente resultado:

$$I_1 = 0{,}727\ \text{A}$$
$$I_2 = 0{,}091\ \text{A}$$
$$I_3 = -0{,}818\ \text{A}$$

En el MATERIAL WEB que se ha elaborado para este texto podrás encontrar la hoja de Microsof Excel con la que se ha resuelto este sistema de ecuaciones.

Actividad propuesta 7.1

Determina las corrientes por cada una de las ramas de los circuitos de las Figuras 7.11, 7.12 y 7.13.

a)

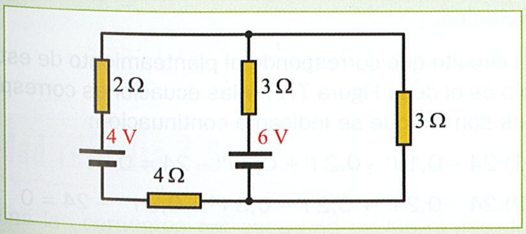

Figura 7.11.

b)

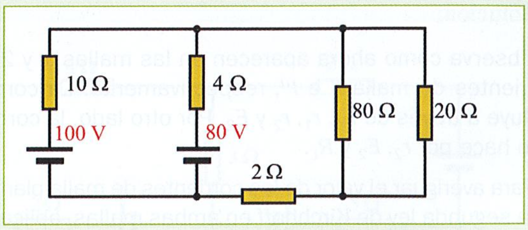

Figura 7.12.

c)

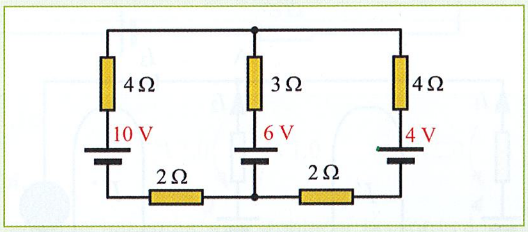

Figura 7.13.

La solución a esta Actividad propuesta la puedes encontrar dentro del MATERIAL WEB elaborado para este texto.

7.2. Ecuaciones de las mallas o de Maxwell

Con la idea de simplificar el número de ecuaciones que se plantean en la resolución de un circuito, Maxwell desarrolló el siguiente sistema que parte de la segunda ley de Kirchhoff.

Se supone que las diferentes mallas del circuito son recorridas por lo que se conoce como corrientes de mallas. El número de ecuaciones necesarias para resolver el circuito será igual al número de incógnitas planteadas, que en este caso coincidirá con las corrientes de malla. Para entender esto mejor vamos a resolver la siguiente actividad.

Actividad resuelta 7.4

Averigua las corrientes I_1, I_2 e I_3 que fluyen por cada una de las ramas del circuito de la Figura 7.14.

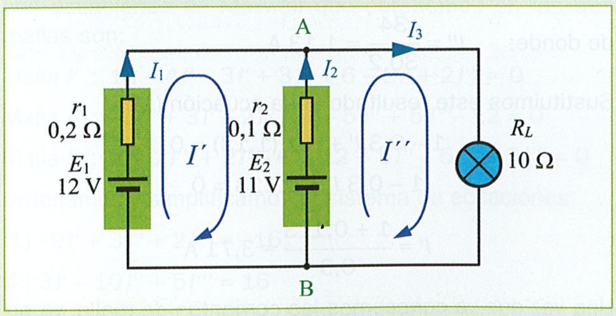

Figura 7.14.

Solución:

Observa cómo ahora aparecen en las mallas 1 y 2 las corrientes de malla I' e I'', respectivamente. La corriente I' fluye a través de E_1, r_1, r_2 y E_2. Por otro lado, la corriente I'' lo hace por r_2, E_2 y R_L.

Para averiguar el valor de las corrientes de malla planteamos la segunda ley de Kirchhoff en ambas mallas, aplicando los mismos criterios de signos que en otras ocasiones (Figura 7.15).

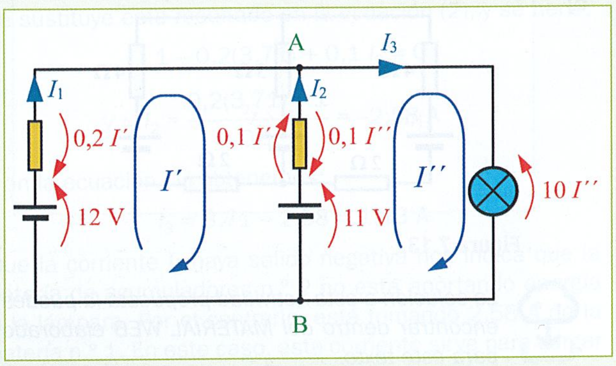

Figura 7.15.

(1) Ecuación para la corriente de malla I':

$$12 - 0{,}2\,I' - 0{,}1\,I' + 0{,}1\,I'' - 11 = 0$$

(2) Ecuación para la corriente de malla I'':

$$11 - 0{,}1\,I'' + 0{,}1\,I' - 10\,I'' = 0$$

Con estas dos ecuaciones ya podemos averiguar los valores de I' e I'' (observa que aplicando las ecuaciones de Maxwell para resolver este circuito estamos necesitando una ecuación menos que si hubiésemos aplicado las dos leyes de Kirchhoff).

Simplificando y ordenando tenemos que:

(1) $1 - 0{,}3\,I' + 0{,}1\,I'' = 0$

(2) $11 + 0{,}1\,I' - 10{,}1\,I'' = 0$

Al multiplicar la ecuación (2) por 3 y sumar este resultado a la ecuación (1) se elimina I':

$$(1)\ 1 - 0{,}3\,I' + 0{,}1\,I'' = 0$$

$$(2)\ 33 + 0{,}3\,I' - 30{,}3\,I'' = 0$$

$$34 - 30{,}2\,I'' = 0$$

de donde: $I'' = \dfrac{34}{30{,}2} = 1{,}13\ \text{A}$

Sustituimos este resultado en la ecuación (1):

$$1 - 0{,}3\,I' + 0{,}1\,(1{,}13) = 0$$

$$1 - 0{,}3\,I' + 0{,}113 = 0$$

$$I' = \frac{1 + 0{,}113}{0{,}3} = 3{,}71\ \text{A}$$

Una vez que ya conocemos las corrientes de malla, ya podemos calcular las corrientes de rama I_1, I_2 e I_3.

Para la corriente de rama I_1 observamos en el circuito de la Figura 7.14 que esta corriente es igual a la de malla I':

$$I_1 = I' = 3{,}71\ \text{A}$$

Lo mismo ocurre para la corriente de rama I_3 que es igual a la de malla I'':

$$I_3 = I'' = 1{,}13\ \text{A}$$

Si observas atentamente el circuito de la Figura 7.14 podrás apreciar que la corriente I_2 es la diferencia de las corrientes de ambas mallas que comparte ($I'' - I'$) (la que va en el mismo sentido menos la que va en sentido contrario):

$$I_2 = I'' - I' = 1{,}13 - 3{,}71 = -2{,}58\ \text{A}$$

En la Figura 7.16 se explica de forma gráfica cómo se han realizado estas últimas operaciones.

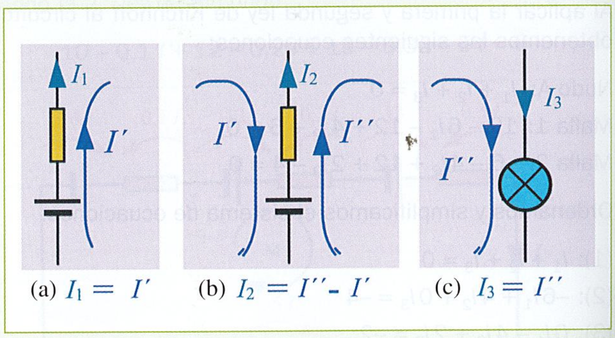

Figura 7.16.

Podrás comprobar que hemos obtenido el mismo resultado al resolver este circuito mediante la aplicación de las dos leyes de Kirchhoff y la aplicación de las ecuaciones de Maxwell.

Actividad resuelta 7.5

Se conectan en paralelo tres generadores de 24 V de resistencia interna 0,1 Ω, 0,2 Ω y 0,3 Ω, respectivamente. Determina la corriente que suministra cada generador a una carga de 10 Ω, así como la tensión y la potencia a la que trabaja la misma.

Solución:

El circuito que corresponde al planteamiento de este ejemplo es el de la Figura 7.17 y las ecuaciones correspondientes son las que se indican a continuación:

(1) $24 - 0{,}1\,I' - 0{,}2\,I' + 0{,}2\,I'' - 24 = 0$

(2) $24 - 0{,}2\,I'' + 0{,}2\,I' - 0{,}3\,I'' + 0{,}3\,I''' - 24 = 0$

(3) $24 - 0{,}3\,I''' + 0{,}3\,I'' - 10\,I''' = 0$

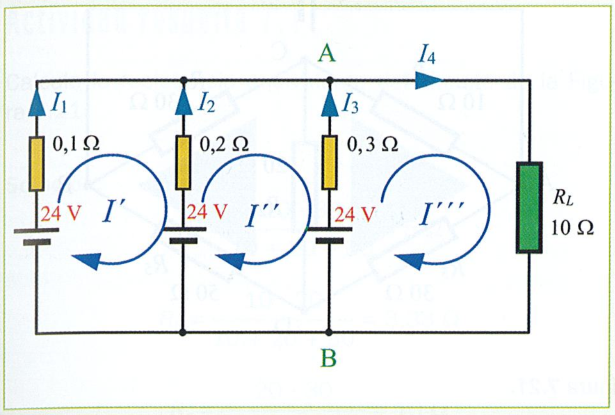

Figura 7.17.

Ordenamos y simplificamos el sistema de ecuaciones:

(1) $-0{,}3\,I' + 0{,}2\,I'' + 0\,I''' = 0$

(2) $0{,}2\,I' - 0{,}5\,I'' + 0{,}3\,I''' = 0$

(3) $0\,I' + 0{,}3\,I'' - 10{,}3\,I''' = -24$

Aplicando la regla de Cramer, o por cualquier otro método adecuado para la resolución de sistemas de ecuaciones, se llega al siguiente resultado para las corrientes de malla:

$$I' = 1{,}302\text{ A};$$
$$I'' = 1{,}953\text{ A};$$
$$I''' = 2{,}387\text{ A};$$

Al observar la Figura 7.17 podremos establecer la relación existente entre las corrientes de rama y las de malla, concluyendo que:

$$I_1 = I' = 1{,}302\text{ A};$$
$$I_2 = I'' - I' = 1{,}953 - 1{,}302 = 0{,}651\text{ A}$$
$$I_3 = I''' - I'' = 2{,}387 - 1{,}953 = 0{,}434\text{ A}$$
$$I_4 = I''' = 2{,}387\text{ A}$$

Siguiendo los mismos pasos que en las actividades anteriores obtenemos la tensión y potencia en la resistencia de carga.

$$(U_{AB} = 23{,}87\text{ V};\ P = 56{,}98\text{ W})$$

En el MATERIAL WEB que se ha elaborado para este texto podrás encontrar la hoja de Microsoft Excel con la que se ha resuelto el sistema de ecuaciones.

Actividad resuelta 7.6

Determina las corrientes por cada una de las ramas del circuito de la Figura 7.18.

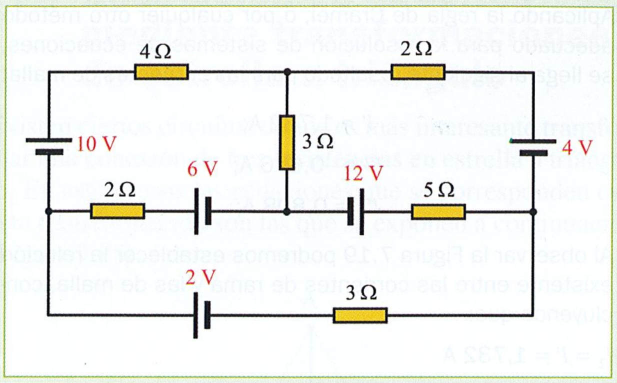

Figura 7.18.

Solución:

Lo primero que hacemos es establecer las intensidades de corriente por cada rama (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 e I_6) y su sentido hipotético. Además, establecemos las corrientes por las tres mallas del circuito (I', I'' e I'''), y marcamos las caídas de tensión que aparecen en todas las cargas, así como el de las f. e. m. de los generadores con su polaridad correspondiente (Figura 7.19).

Recuerda que lo convenido para establecer el sentido de las tensiones (flechas rojas), es que las de los generadores llevan la punta de la flecha en el positivo, mientras que las caídas de tensión en las resistencias se marcan en sentido contrario al de la corriente de malla que las recorre.

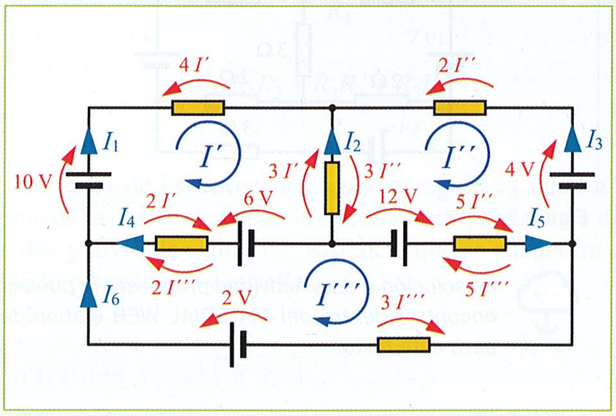

Figura 7.19.

Las ecuaciones de Maxwell que obtenemos en las tres mallas son:

Malla I' : $10 - 4I' - 3I' + 3I'' + 6 - 2I' + 2I''' = 0$

Malla I'' : $-3I'' + 3I' - 2I'' - 4 - 5\,I'' + 5\,I''' - 12 = 0$

Malla I''': $2 + 2I''' + 2I' - 6 + 12 + 5I'' - 5I''' - 3I''' = 0$

Ordenamos y simplificamos el sistema de ecuaciones:

(1) $-9I' + 3I'' + 2I''' = -16$

(2) $3I' - 10I'' + 5I''' = 16$

(3) $2I' + 5I'' - 10I''' = -8$

Aplicando la regla de Cramer, o por cualquier otro método adecuado para la resolución de sistemas de ecuaciones, se llega al siguiente resultado para las corrientes de malla:

$$I' = 1{,}732 \text{ A};$$
$$I'' = -0{,}676 \text{ A};$$
$$I''' = 0{,}808 \text{ A};$$

Al observar la Figura 7.19 podremos establecer la relación existente entre las corrientes de rama y las de malla, concluyendo que:

$I_1 = I' = 1{,}732$ A

$I_2 = I'' - I' = -0{,}676 - 1{,}732 = -2{,}408$ A

$I_3 = I'' = -0{,}676$ A

$I_4 = I' - I''' = 1{,}732 - 0{,}808 = 0{,}924$ A

$I_5 = I''' - I'' = 0{,}808 + 0{,}676 = 1{,}484$ A

$I_6 = I''' = 0{,}808$ A

Actividad propuesta 7.2

Determina las corrientes por cada una de las ramas del circuito de las Figura 7.20.

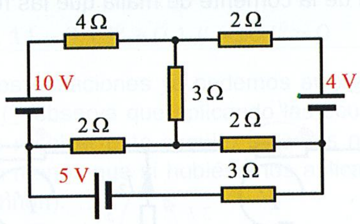

Figura 7.20.

La solución a esta Actividad propuesta la puedes encontrar dentro del MATERIAL WEB elaborado para este texto.

7.3. Resolución de circuitos mediante transformaciones de triángulo a estrella

En el circuito de la Figura 7.21 se pide encontrar la resistencia equivalente. Como podrás comprobar, no existe ninguna resistencia que esté conectada en serie ni en paralelo con otra. Una forma de resolver este ejercicio sería aplicar las leyes de Kirchhoff. Sin embargo, resulta más sencillo aplicar el método de transformar resistencias conectadas en triángulo a estrella.

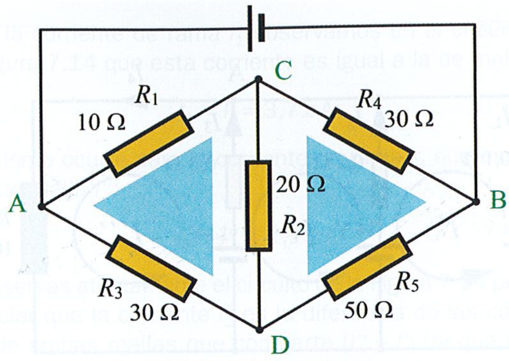

Figura 7.21.

Observa cómo las resistencias R_1, R_2 y R_3 forman un triángulo (Figura 7.22).

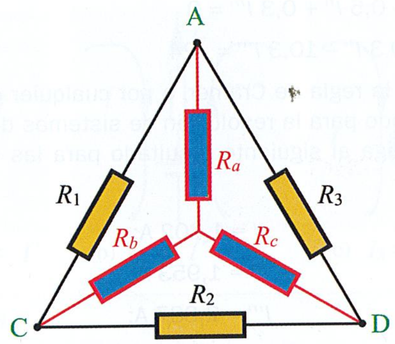

Figura 7.22. Transformación de triángulo a estrella.

Aplicando las leyes de Kirchhoff se pueden obtener las resistencias equivalentes de un circuito equivalente en forma de estrella. Las ecuaciones que corresponden a estas relaciones son:

$$R_a = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

El valor óhmico de las resistencias equivalentes en estrella es igual al producto de las dos resistencias adyacentes del triángulo, dividido entre la suma de las tres resistencias del triángulo.

Actividad resuelta 7.7

Calcula la resistencia equivalente del circuito de la Figura 7.21.

Solución:

$$R_a = \frac{10 \cdot 30}{10 + 20 + 30} = 5\ \Omega$$

$$R_b = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20 + 30} = 3{,}33\ \Omega$$

$$R_c = \frac{20 \cdot 30}{10 + 20 + 30} = 10\ \Omega$$

Sustituyendo el circuito triángulo por el estrella nos queda el circuito equivalente de la Figura 7.23.

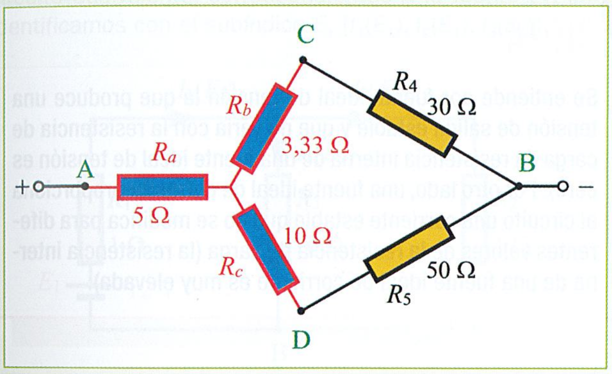

Figura 7.23.

Para determinar la resistencia total de este, vamos reduciendo las resistencias, tal como ya hicimos en los circuitos mixtos [véanse las Figuras 7.24(a), 7.24(b) y 7.24(c)].

$$R_{4b} = 3{,}33 + 30 = 33{,}33\ \Omega$$

$$R_{5c} = 10 + 50 = 60\ \Omega$$

$$R_p = \frac{33{,}33 \cdot 60}{33{,}33 + 60} = 21{,}43\ \Omega$$

La resistencia equivalente será: $R_T = 5 + 21{,}43 = 26{,}43\ \Omega$.

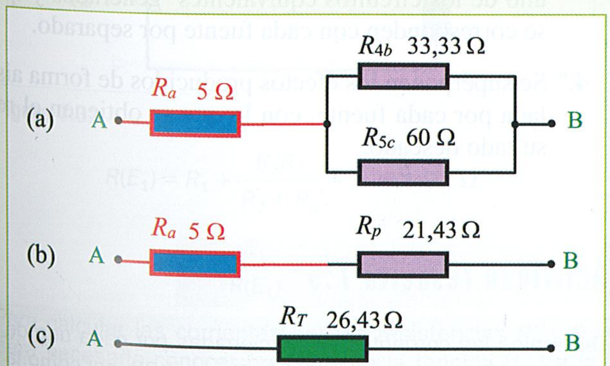

Figura 7.24.

7.4. Resolución de circuitos mediante transformaciones de estrella a triángulo

Existen ciertos circuitos donde es más interesante transformar una conexión de tres resistencias en estrella a triángulo. En estos casos las ecuaciones que se corresponden con esta transformación son las que se exponen a continuación (Figura 7.25).

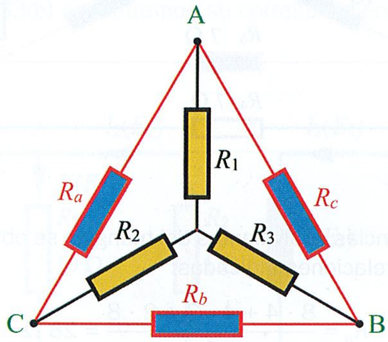

Figura 7.25. Transformación de estrella a triángulo.

$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}$$

$$R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}$$

$$R_c = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}$$

El valor de las resistencias del triángulo es igual a la suma de las resistencias de la estrella multiplicadas de dos en dos y divididas entre la resistencia que se encuentra en el lado opuesto de la estrella.

Actividad resuelta 7.8

Determina la resistencia equivalente del circuito de la Figura 7.26.

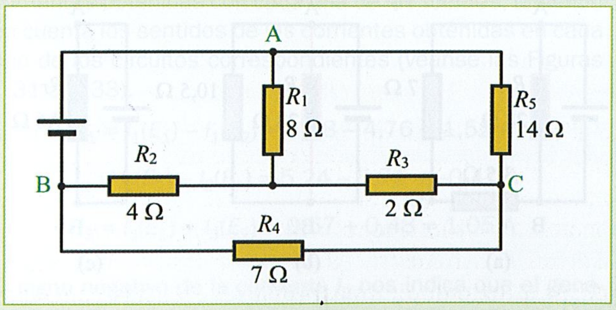

Figura 7.26.

Solución:

Se observa claramente que existe una estrella formada por las resistencias R_1, R_2 y R_3, que si transformamos a triángulo obtenemos un circuito equivalente más sencillo, como el que se muestra en la Figura 7.27.

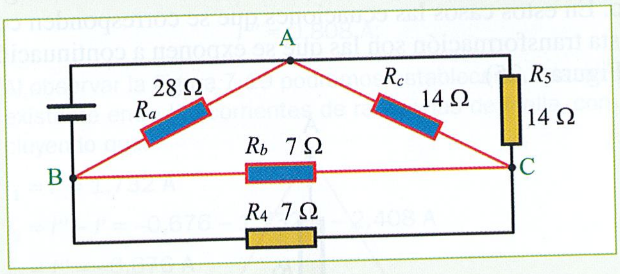

Figura 7.27.

Las resistencias equivalentes del triángulo se obtienen aplicando las relaciones indicadas:

$$R_a = \frac{8 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 8}{2} = 28\ \Omega$$

$$R_b = \frac{8 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 8}{8} = 7\ \Omega$$

$$R_c = \frac{8 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 8}{4} = 14\ \Omega$$

Si ordenamos un poco el circuito equivalente de la Figura 7.27, se obtiene el circuito de la Figura 7.28, que ya puedes resolver como un sencillo circuito mixto.

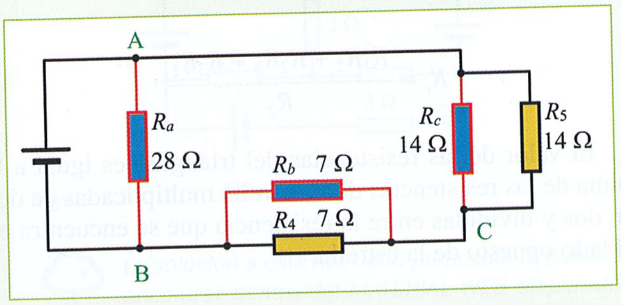

Figura 7.28.

En las Figuras 7.29(a), 7.29(b) y 7.29(c), se dibujan los circuitos equivalentes hasta encontrar la resistencia total.

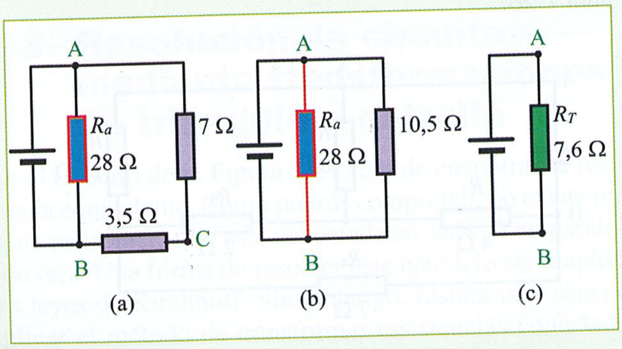

Figura 7.29.

7.5. Teorema de la superposición

Mediante este teorema se pueden resolver circuitos similares a los que se resuelven mediante las leyes de Kirchhoff.

El teorema de la superposición nos indica que en un circuito formado por varias fuentes de tensión o de corriente, la tensión o la corriente que se presenta en cualquier componente de dicho circuito es la suma de los efectos producidos por cada una de las fuentes trabajando independientemente.

Para poder aplicar este teorema las magnitudes eléctricas deben ser lineales (la corriente debe ser proporcional a la tensión), así como tener en cuenta la polaridad de aquellas.

NOTA

Se entiende por fuente ideal de tensión la que produce una tensión de salida estable y que no varía con la resistencia de carga (la resistencia interna de una fuente ideal de tensión es cero). Por otro lado, una fuente ideal de corriente proporciona al circuito una corriente estable que no se modifica para diferentes valores de la resistencia de carga (la resistencia interna de una fuente ideal de corriente es muy elevada).

El proceso de resolución de circuitos mediante el teorema de superposición suele ser el siguiente:

1.º Se selecciona una de las fuentes del circuito para que actúe por separado del resto.

2.º Para eliminar el resto de las fuentes se procede de tal forma que si es una fuente de tensión se sustituye cortocircuitándola; pero si es una fuente de corriente se sustituye por un circuito abierto.

3.º Se calculan las intensidades de corriente de cada uno de los circuitos equivalentes generados y que se corresponden con cada fuente por separado.

4.º Se superponen los efectos producidos de forma aislada por cada fuente, con lo que se obtienen el resultado deseado.

Actividad resuelta 7.9

Determina las corrientes proporcionadas por cada uno de los generadores del circuito de la Figura 7.30, así como la corriente que fluye por la carga de 10 Ω.

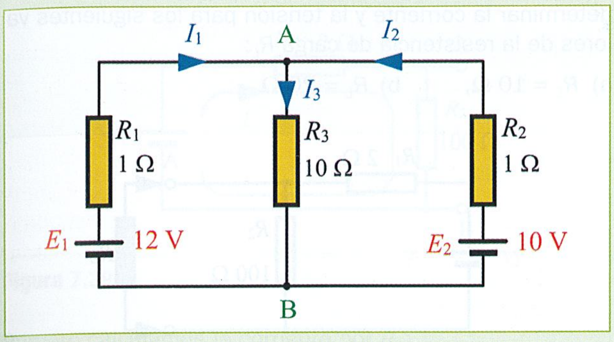

Figura 7.30.

Solución:

Primero aislamos del circuito la fuente de tensión E_1. Para hacerlo cortocircuitamos la fuente E_2, tal como se muestra en la Figura 7.31. Las corrientes que aparecen por este circuito equivalente, correspondientes a la fuente E_1, las identificamos con el subíndice E_1 [$I_1(E_1)$, $I_2(E_1)$, $I_3(E_1)$].

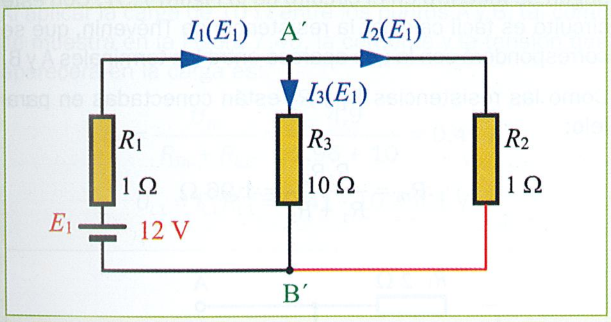

Figura 7.31.

Seguidamente, se reducen las resistencias conectadas en serie y paralelo, como si se tratase de un circuito mixto, hasta encontrar un circuito equivalente, como el de la Figura 7.32, con una sola resistencia $R(E_1)$ y una fuente de tensión E_1.

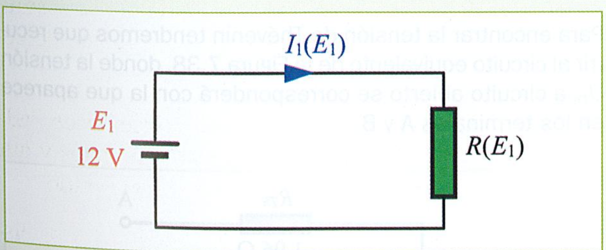

Figura 7.32.

$$R(E_1) = R_1 + \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2} = \ldots = 1{,}91\ \Omega$$

$$I_1(E_1) = \frac{E_1}{R(E_1)} = \ldots = 6{,}28\ \text{A}$$

Para calcular las corrientes por las resistencias R_2 y R_3 será necesario conocer previamente la tensión $U_{A'B'}$ a la que están sometidas estas:

$$U_{A'B'} = \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2}\, I_1(E_1) = \ldots = 5{,}71\ \text{V}$$

$$I_2(E_1) = \frac{U_{A'B'}}{R_2} = \ldots = 5{,}71\ \text{A}$$

$$I_3(E_1) = \frac{U_{A'B'}}{R_3} = \ldots = 0{,}57\ \text{A}$$

Ahora repetimos el mismo proceso para aislar la fuente E_2. En la Figura 7.33(a) cortocircuitamos la fuente E_1, y en la Figura 7.33(b) encontramos su correspondiente circuito equivalente.

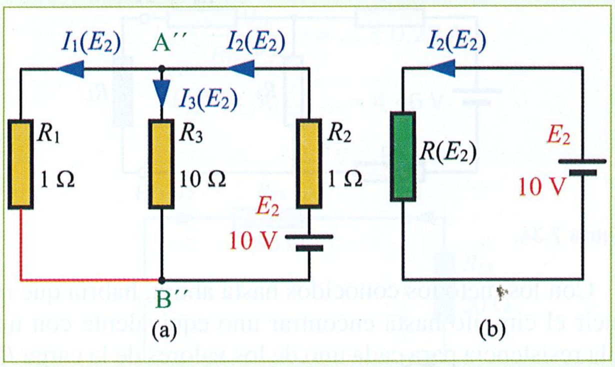

Figura 7.33.

Los procesos para determinar las corrientes del circuito con la fuente E_2 son similares a los empleados anteriormente:

$$R(E_2) = R_2 + \frac{R_3 R_1}{R_3 + R_1} = \ldots = 1{,}91\ \Omega$$

$$I_2(E_2) = \frac{E_2}{R(E_2)} = \ldots = 5{,}24\ \text{A}$$

$$U_{A''B''} = \frac{R_3 R_1}{R_3 + R_1}\, I_2(E_2) = \ldots = 4{,}76\ \text{V}$$

$$I_1(E_2) = \frac{U_{A''B''}}{R_1} = \ldots = 4{,}76\ \text{A}$$

$$I_3(E_2) = \frac{U_{A''B''}}{R_3} = \ldots = 0{,}48\ \text{A}$$

Por último, superponemos los efectos producidos aisladamente por cada una de ellas, para lo que sumamos las corrientes obtenidas con cada una de las fuentes, teniendo en cuenta los sentidos de las corrientes obtenidas en cada uno de los circuitos correspondientes (véanse las Figuras 7.31 a 7.33).

$$I_1 = I_1(E_1) - I_1(E_2) = 6{,}28 - 4{,}76 = 1{,}52\ \text{A}$$

$$I_2 = I_2(E_2) - I_2(E_1) = 5{,}24 - 5{,}71 = -0{,}47\ \text{A}$$

$$I_3 = I_3(E_1) + I_3(E_2) = 0{,}57 + 0{,}48 = 1{,}05\ \text{A}$$

El signo negativo de la corriente I_2 nos indica que el generador, en vez de aportar corriente a la carga, la absorbe.

7.6. Teorema de Thévenin

Mediante este teorema es posible reducir una red compleja con varias cargas interconectadas entre sí y encontrar un circuito equivalente sencillo, en el que solamente aparezca una fuente de tensión ideal con una resistencia en serie.

Supongamos que tenemos que calcular la corriente para diferentes valores óhmicos de la carga R_L conectada entre los extremos A y B de un circuito como el de la Figura 7.34.

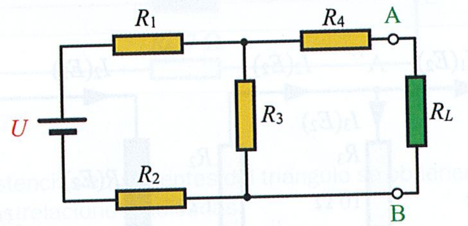

Figura 7.34.

Con los métodos conocidos hasta ahora, habría que reducir el circuito hasta encontrar uno equivalente con una sola resistencia para cada uno de los valores de la carga R_L. Mediante el teorema de Thévenin basta con encontrar una sola vez un circuito que contenga una fuente de tensión ideal U_{Th} en serie con una resistencia R_{Th}, y con los terminales abiertos en la conexión con la carga R_L (puntos A y B de la Figura 7.35).

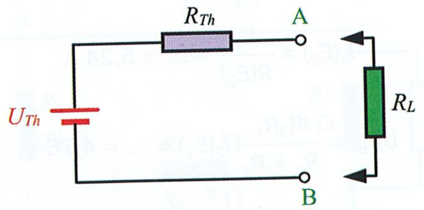

Figura 7.35. Circuito equivalente de Thévenin.

Una vez encontrado el circuito equivalente de Thévenin, bien fácil nos será calcular la corriente para cualquier valor de la carga R_L.

A la tensión que aparece cuando se desconecta la resistencia de carga se la conoce por el nombre de **tensión de Thévenin (U_{Th})**. La resistencia que queda conectada en serie con la fuente de tensión del circuito equivalente es la **resistencia de Thévenin (R_{Th})**, y es la que corresponde a los terminales A y B de la carga cuando se han cortocircuitado todas las fuentes de tensión del circuito.

Actividad resuelta 7.10

En el circuito de la Figura 7.36 se nos muestra el circuito equivalente de una fuente de alimentación; se trata de determinar la corriente y la tensión para los siguientes valores de la resistencia de carga R_L:

a) $R_L = 10\ \Omega$, b) $R_L = 20\ \Omega$

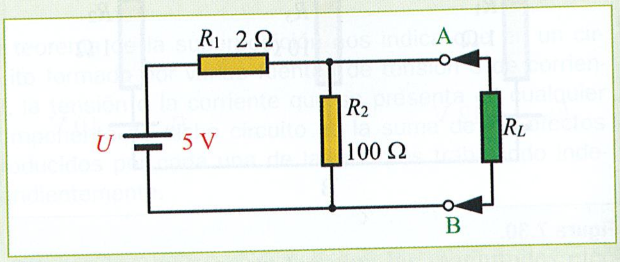

Figura 7.36.

Solución:

Lo primero que haremos será encontrar el circuito equivalente de Thévenin entre los extremos de la carga R_L. Para ello, primero cortocircuitamos la fuente de tensión de 5 V, según se muestra en el circuito de la Figura 7.37. Con este circuito es fácil calcular la resistencia de Thévenin, que se corresponderá con la que aparece entre los terminales A y B. Como las resistencias R_1 y R_2 están conectadas en paralelo:

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1{,}96\ \Omega$$

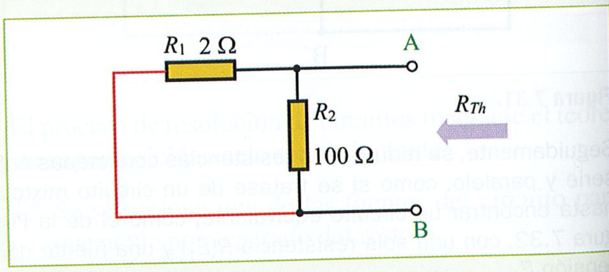

Figura 7.37.

Para encontrar la tensión de Thévenin tendremos que recurrir al circuito equivalente de la Figura 7.38, donde la tensión U_{Th} a circuito abierto se corresponderá con la que aparece en los terminales A y B.

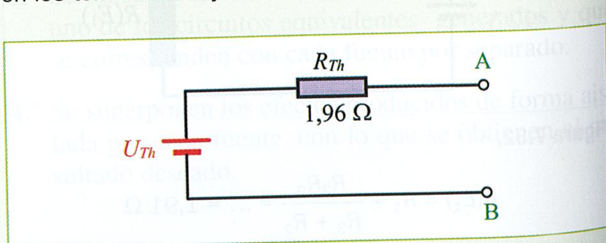

Figura 7.38.

Volviendo al circuito original de la Figura 7.36, si eliminamos la resistencia de carga obtenemos el circuito de la Figura 7.39. Aquí se puede comprobar que la tensión de Thévenin buscada es la que aparece en la resistencia R_2.

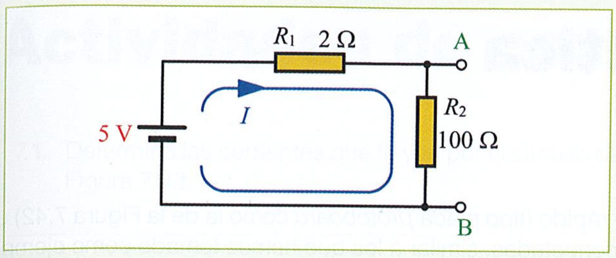

Figura 7.39.

Primero calculamos la corriente por R_2:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{5}{2 + 100} = 0{,}049 \text{ A}$$

$$U_{Th} = U_{AB} = R_2 I = 100 \cdot 0{,}049 = 4{,}9 \text{ V}$$

Una vez obtenido el circuito equivalente de Thévenin (Figura 7.38) ya podemos calcular la corriente y tensión para las diferentes cargas conectadas entre los terminales A y B.

Al aplicar la carga de 10 Ω entre los puntos A y B, tal como se muestra en la Figura 7.40, la corriente y la tensión que aparecerá en la carga es:

$$I_{L1} = \frac{U_{Th}}{R_{Th} + R_{L1}} = \frac{4{,}9}{1{,}96 + 10} = 0{,}41 \text{ A}$$

$$U_{L1} = I_{L1} R_{L1} = 0{,}41 \cdot 10 = 4{,}1 \text{ V}$$

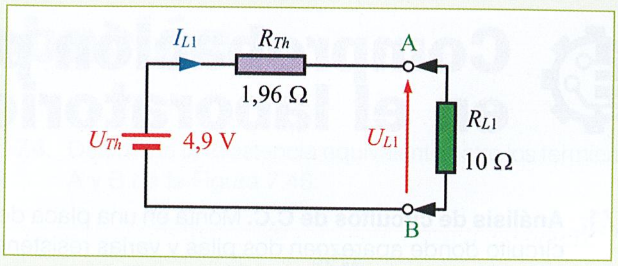

Figura 7.40.

Al conectar la carga de 20 Ω tendremos que (Figura 7.41):

$$I_{L2} = \frac{U_{Th}}{R_{Th} + R_{L2}} = \dots = 0{,}22 \text{ A}$$

$$U_{L2} = I_{L2} R_{L2} = \dots = 4{,}46 \text{ V}$$

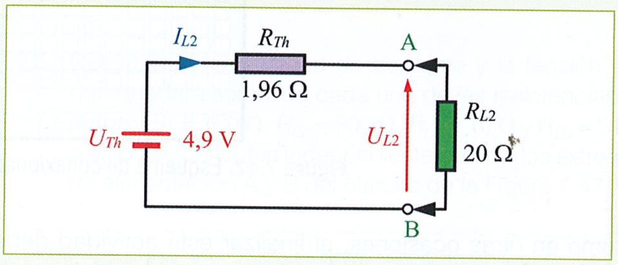

Figura 7.41.

Comprobación práctica en el laboratorio

7.1. Análisis de circuitos de C.C. Monta en una placa de montaje rápido (tipo placa *protoboard* como la de la Figura 7.42) un circuito donde aparezcan dos pilas y varias resistencias interconectadas, similar a los que hemos tomado como ejemplo para el estudio de las leyes de Kirchhoff. Calcula de forma teórica las diferentes tensiones y corrientes del circuito, para luego comprobarlo mediante un voltímetro y un amperímetro de una forma práctica en el circuito montado.

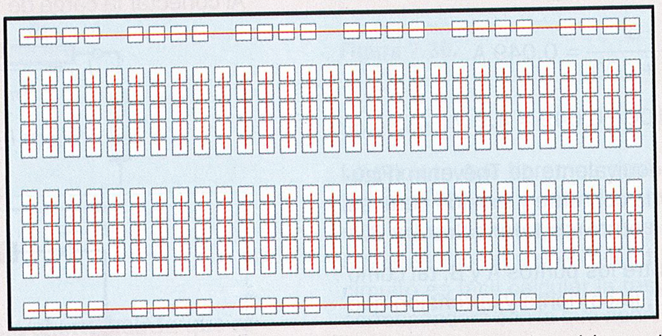

Figura 7.42. Esquema de conexionado interno de una placa *protoboard* de montaje rápido.

Como en otras ocasiones, al finalizar esta actividad deberás elaborar un informe-memoria sobre la actividad desarrollada, indicando los resultados obtenidos y estructurándolos en los apartados necesarios para una adecuada documentación de las mismas (descripción del proceso seguido, medios utilizados, esquemas y planos utilizados, cálculos, medidas, etc.).

Actividades de comprobación

7.1. Determina las corrientes que fluyen por el circuito de la Figura 7.43.

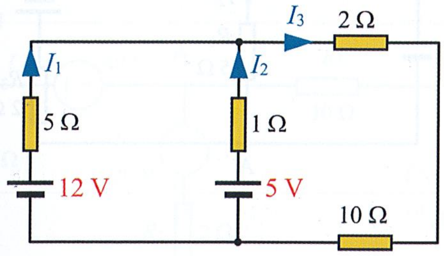

Figura 7.43.

7.2. Averigua la tensión que aparece en la carga de 8 ohmios del circuito de la Figura 7.44.

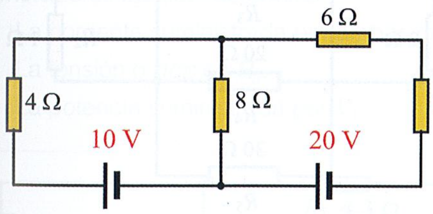

Figura 7.44.

7.3. Halla la resistencia equivalente del circuito de la Figura 7.45.

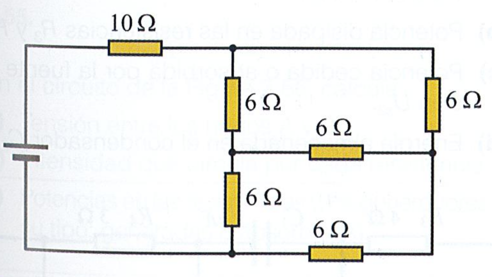

Figura 7.45.

7.4. Determina la resistencia equivalente entre los terminales A y B de la Figura 7.46.

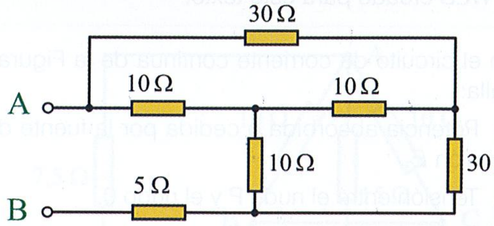

Figura 7.46.

7.5. Determina la intensidad de corriente y la tensión a la que quedará sometida cada una de las resistencias de carga: $R_{L1} = 100\ \Omega$, $R_{L2} = 500\ \Omega$, $R_{L3} = 10\ \Omega$ y $R_{L5} = 3\ k\Omega$, cuando se conecten independientemente a los extremos de alimentación A y B del circuito de la Figura 7.47.

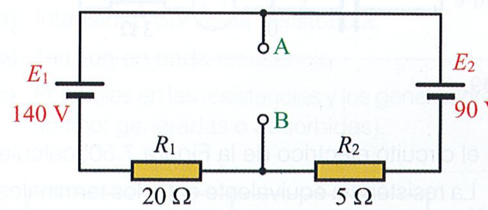

Figura 7.47.

7.6. Calcula las corrientes de rama del circuito de la Figura 7.48.

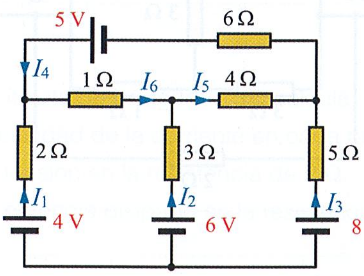

Figura 7.48.

Actividades de evaluación resueltas

A continuación se dan los enunciados de una serie de actividades de evaluación. Estas actividades las podrás encontrar resueltas accediendo al MATERIAL WEB creado para este texto.

7.1. En el circuito de corriente continua de la Figura 7.49, halla:

a) Potencia absorbida o cedida por la fuente de tensión E_3.

b) Tensión entre el nudo P y el nudo 0.

c) Potencia disipada en R_1.

d) Tensión y energía almacenada en el condensador.

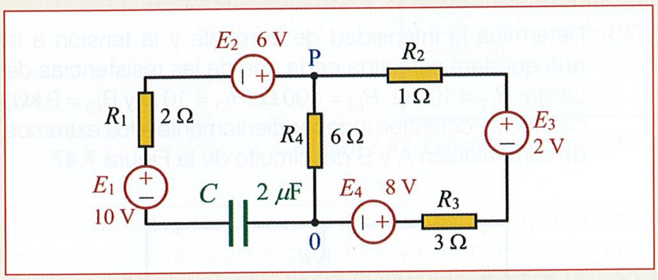

Figura 7.49.

7.2. En el circuito eléctrico de la Figura 7.50, calcula:

a) La resistencia equivalente entre los terminales A y B.

b) Si la tensión en bornes de la resistencia de 2 ohmios es de 40 V, ¿cuál es la tensión en bornes de cada una de las resistencias de 1 ohmio?

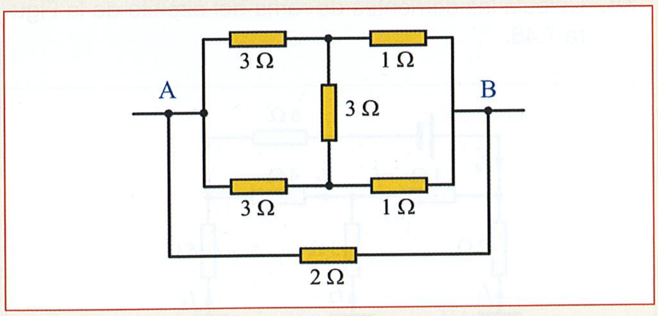

Figura 7.50.

7.3. En el circuito de la Figura 7.51, calcula:

a) Las intensidades indicadas.

b) La potencia generada por cada una de las fuentes de tensión.

c) La potencia consumida por cada una de las resistencias.

d) Lectura de un voltímetro conectado entre los puntos A y B del circuito.

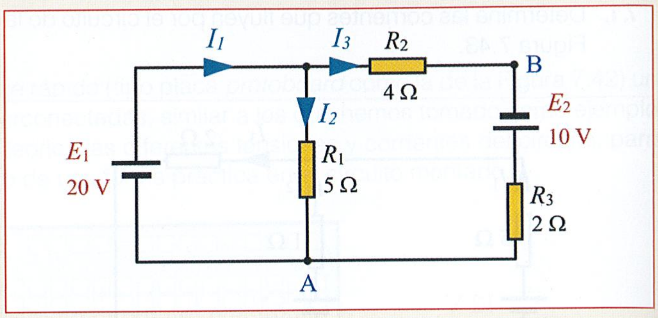

Figura 7.51.

7.4. Calcula la intensidad de las corrientes que circulan por las resistencias R_3, R_4 y R_5 del circuito de corriente continua de la Figura 7.52.

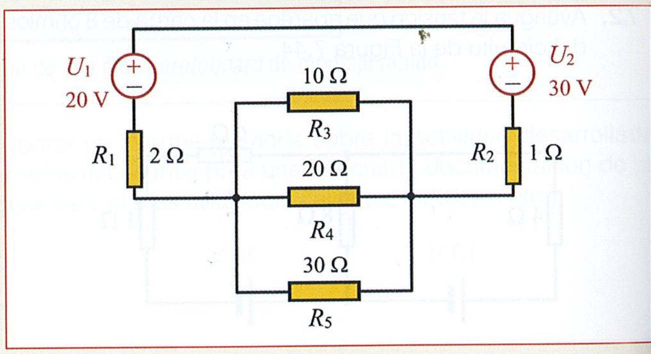

Figura 7.52.

7.5. En el circuito de corriente continua de la Figura 7.53, halla:

a) Intensidad de corriente que circula por los elementos del circuito.

b) Potencia disipada en las resistencias R_3 y R_6.

c) Potencia cedida o absorbida por la fuente de tensión U_{s2}.

d) Energía almacenada en el condensador C_2.

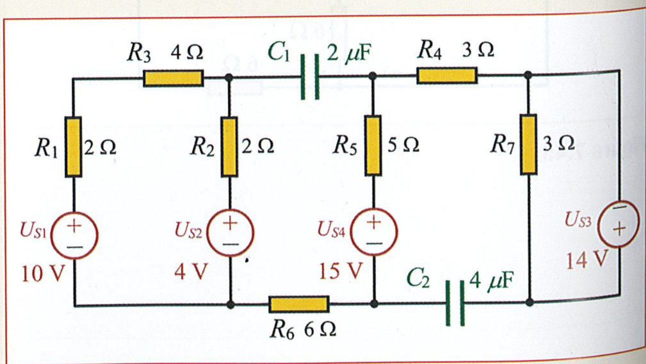

Figura 7.53.

7.6. En el circuito de corriente continua de la Figura 7.54, halla:

a) Potenciales en los puntos A y B del circuito, respecto de 0.

b) Energía almacenada en el condensador C_1.

c) Potencia entregada o absorbida por la fuente de tensión U_{s2}.

d) Potencia disipada en R_5.

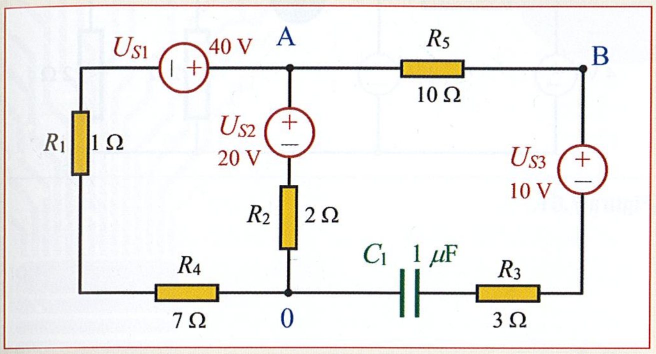

Figura 7.54.

7.7. En el circuito de la Figura 7.55, y considerando ambos generadores ideales, determina:

a) La corriente suministrada por ambos generadores.

b) La tensión o *ddp* en R_3.

c) La potencia suministrada por V_1.

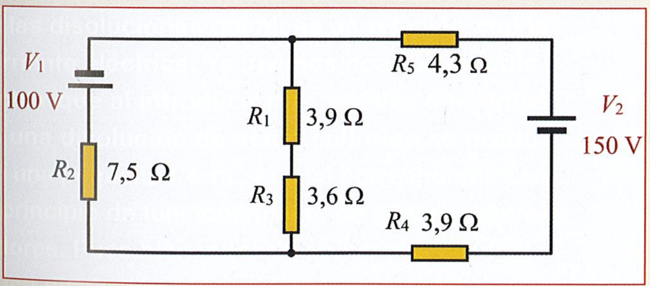

Figura 7.55.

7.8. En el circuito de la Figura 7.56, calcula:

a) Tensión entre los nudos A y B.

b) Intensidad que circula por cada resistencia.

c) Potencias en las resistencias y los generadores (indica su tipo: generadas o absorbidas).

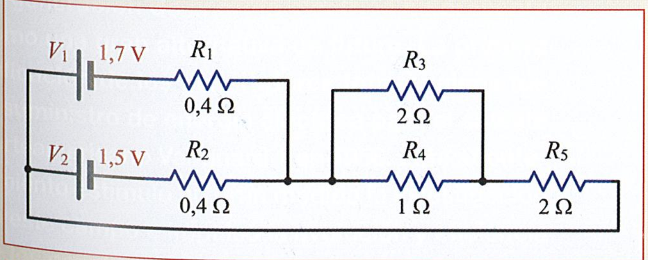

Figura 7.56.

7.9. En la red de corriente continua de la Figura 7.57, la potencia disipada por una de las resistencias de 20 Ω es de 45 W. Determina:

a) La resistencia equivalente, vista desde los bornes de la fuente ideal de tensión.

b) La f. e. m. *E* de la fuente.

c) El rendimiento de la fuente real de tensión, constituida por *E* y 7,5 Ω.

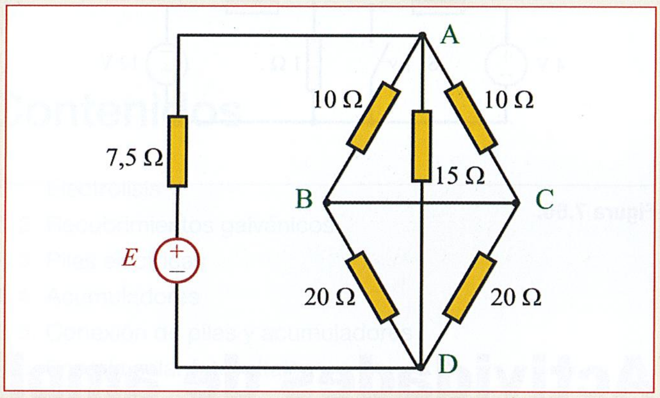

Figura 7.57.

7.10. En el circuito de la Figura 7.58, calcula:

a) Intensidad por cada resistencia.

b) Tensión en cada resistencia.

c) Potencias en las resistencias y los generadores (indica su tipo: generadas o absorbidas).

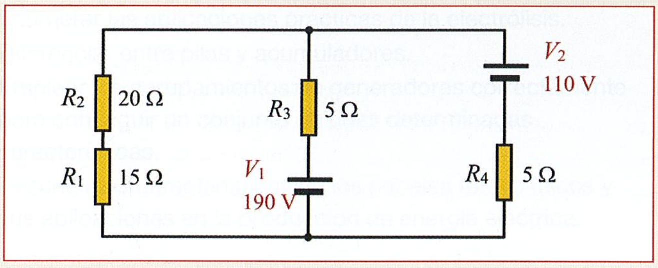

Figura 7.58.

7.11. En el circuito de la Figura 7.59, calcula:

a) Intensidad de la corriente en cada rama.

b) La tensión en la resistencia de 2 Ω.

c) La potencia disipada en la resistencia de 5 Ω.

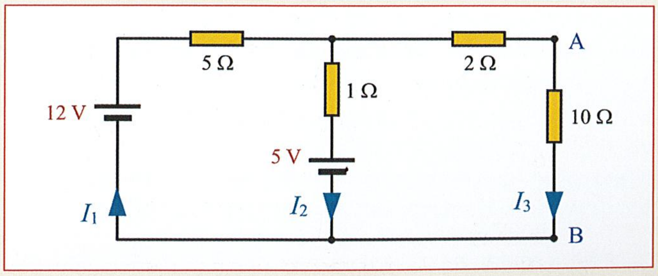

Figura 7.59.

7.12. En el circuito de la Figura 7.60, determina la potencia cedida por cada una de las fuentes de tensión y absorbida por cada una de las resistencias:

a) Con el interruptor S cerrado.

b) Con el interruptor S abierto.

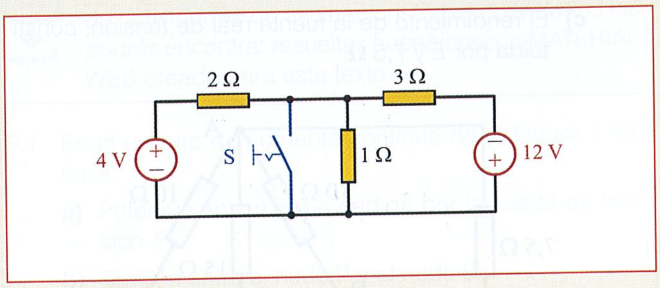

Figura 7.60.

7.13. En el circuito de corriente continua de la Figura 7.61 se pide:

a) Indicación del amperímetro e intensidades por cada una de las resistencias.

b) Potencia cedida o absorbida en cada uno de los elementos del circuito.

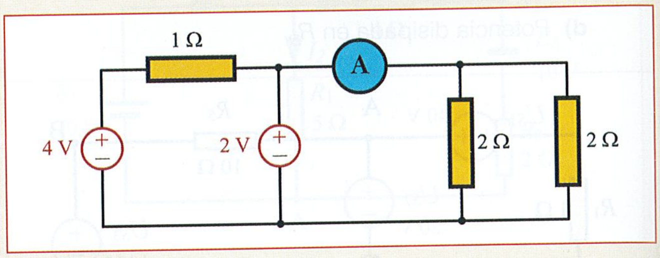

Figura 7.61.

Actividades de ampliación

Con el fin de conseguir una mayor profundización en la materia, se han incluido los enunciados de una serie de ***«actividades de evaluación propuestas de ampliación (7)»*** para esta unidad que podrás encontrar dentro del MATERIAL WEB elaborado para este texto. Selecciona alguna de estas actividades y encuentra su solución.